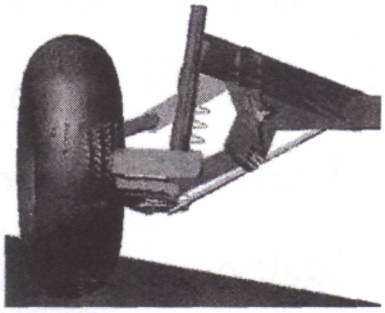
Uitgewerkte versie

Tentamen Regeltechniek TBKRT05E, 3 november 2010

Naam: Student ID:

Opgave 1 (conceptuele opgave, 15 punten, waarvan 5 bonus)

Stel u werkt bij een autofabrikant en er moet een nieuwe auto ontworpen worden. U wordt gevraagd het suspensiesysteem te ontwerpen, zodanig dat mensen in de auto zo comfortabel mogelijk kunnen rijden binnen een bepaald budget. Daarvoor kijkt u eerst naar een zogenaamd quarter car (kwart-auto), die hieronder schematisch is weergegeven. Om het comfort te regelen richt u zich eerst op een regeling van de verticale beweging van de auto.



De vragen hieronder kunnen op bovenstaande situatie slaan, maar zijn ook relevant voor andere praktijksituaties. Bedenk dit bij het beantwoorden van de vragen.

a). Hoe bepaalt u een overdrachtsfunctie van een praktisch systeem? Omschrijf de stappen in woorden.

1 Bepaal via wetten van de fysica ~~het~~ de bewegingsvergelijkingen. Bepaal actuatie (ingang) en meting / doel (uitgang) [Maak vervolgens een toestandsmodel met toestand x, ingang u en uitgang y. Indien het model niet-lineair is, wordt er gelineariseerd (om een evenwichtspunt). Het model: $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$. Overdrachtsfunctie:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2 Andere mogelijkheid: op basis van data.

8

Z.O.Z.

b). Welke stappen doorloopt u voor een lineair regelaarontwerp? Omschrijf de stappen in woorden.

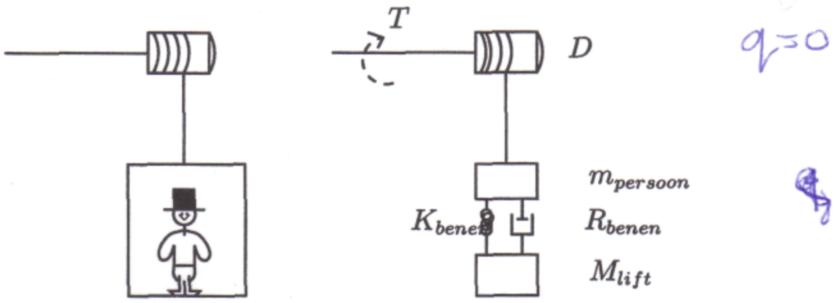
M.b.v. de overdrachts functie kan poolplaatsing toe-gepast worden.
Tevens kan m.b.v. de Nyquist plot en/of Bode plot een PID / lead / lag regelaar ontworpen worden.
7
Daarbij spelen specificaties in de vorm van max. fout, overshoot, fasemarge, rise time, ω_c, etc. een belangrijke rol.
De Bode plot van de regeling is van invloed op de breekpunten, fasetoevoeging e.d.

Tentamen Regeltechniek TBKRT05E, 3 november 2010 Uitwerking.

Naam: Student ID:

Opgave 2 (18 punten)

Beschouw het liftsysteem zoals hieronder gegeven. Neem aan dat de katrol gewichtsloos is, omdat deze middels een constructie aan de wand bevestigd is. De massa van de lift en persoon worden gegeven door M_{lift} respectievelijk $m_{persoon}$, de damping en veerconstante van de persoon door R_{benen} respectievelijk K_{benen}, de diameter van de katrol door D en het moment (torque) dat de lift aandrijft door T.



a). Hoeveel toestanden zijn minimaal nodig voor een toestandssysteembeschrijving? Motiveer uw antwoord!

opslag = toestand → 3

Er zijn 3 energie-opslagelementen. (2 massa's, 1 veer), dus er zijn minimaal 3 toestanden nodig.

6

b). Wat is de Lagrangiaan van dit systeem? Motiveer uw antwoord!

$q_p = q_l \rightarrow 4$

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = \overbrace{\tfrac{1}{2} m_{persoon}\, \dot q^2_{persoon} + \tfrac{1}{2} m_{lift}\, \dot q^2_{lift}}^{3}$$
$$\underbrace{-\tfrac{1}{2}K_{benen}(q_{persoon} - q_{lift})^2}_{2} \underbrace{- m_p g\, q_{persoon} - m g\, q_{lift}}_{1}$$

6

c). Wat is de Rayleigh dissipatiefunctie van dit systeem? Motiveer uw antwoord!

$$D(\dot q) = \tfrac{1}{2} R_{benen}(\dot q_{lift} - \dot q_{persoon})^2$$

6

$F^d = -\frac{\partial D}{\partial \dot q_i}$ 1

$D = \frac{1}{2} R_b \dot q^2 \Rightarrow 3$

Tentamen Regeltechniek TBKRT05E, 3 november 2010
Naam: Student ID:

Opgave 3 (20 punten)

Beschouw de geactueerde Van der Pol differentiaalvergelijking die gebruikt wordt voor beschrijvingen van hartritmes, bijzondere elektrische circuits, etc.

$$\ddot{z}(t) + \alpha\left(z^2(t) - 1\right)\dot{z}(t) + z(t) = u(t)$$

$\alpha \geq 0$ een constante, en $u(t)$ de actuatie.

a). Geef een toestandsbeschrijving van de geactueerde Van der Pol vergelijking. Wat zijn uw toestand(en) en ingang(en)?

$x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 + u \end{cases}$$

5

b). Geef het/de evenwichtspunt(en) van dit systeem voor $u = 0$. Motiveer uw antwoord!

$u = 0$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Evenwichtspunt $(0,0)$

5

c). Lineariseer het systeem om een evenwichtspunt. Motiveer uw antwoord!

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha(x_1^2-1)x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{x=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\alpha x_1 x_2 - 1 & -\alpha(x_1^2-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)}$$

5

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

$$\bar{x} = (x - (0,0)), \quad u - 0 = \bar{u}$$

Z.O.Z.

d). Is het gelineariseerde systeem (en dus het evenwichtspunt) stabiel, asymptotisch stabiel of instabiel voor alle $\alpha \geq 0$? Motiveer uw antwoord!

Eigenwaarden (A)

$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda-\alpha \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-\alpha)+1=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\alpha\lambda+1=0$

5

$\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4}}{2}$ $Re\{\lambda\}>0$, dus instabiel.

3

Opgave 4 (12 punten)

Beschouw het volgende continue tijd toestandssysteem met ingang $u(t)$, uitgang $y(t)$ en met $b \geq 0$:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = (2 \quad 1)\, x(t)$$

a). Geef de overdrachtsfunctie van het systeem. Motiveer uw antwoord!

$H(s) = C(sI-A)^{-1}B$

$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+bs+1}\begin{pmatrix} s+b & +1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$

6

$(2\ 1)\begin{pmatrix} s+b & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s^2+bs+1} = (2\ 1)\begin{pmatrix} s+b+1 \\ -1+s \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s^2+bs+1} = \frac{2s+2b+2-1+s}{s^2+bs+1} = \frac{3s+2b+1}{s^2+bs+1}$

b). Is dit systeem underdamped, overdamped, of kritisch gedempt voor $b \geq 0$? Motiveer uw antwoord!

$s^2+bs+1=0$ karakteristieke verg. $s = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4}$ $\Rightarrow Re\{s\}<0$

6

$\omega_n^2=1$ en $2\zeta\omega_n=b$ $\Rightarrow \omega_n=1$

en $\zeta = \frac{b}{2}$ Voor $0<b<2$, underdamped

$b=0$: ongedempd

$b=2$ kritisch gedempd. $b>2$ overdamped

Tentamen Regeltechniek TBKRT05E, 3 november 2010

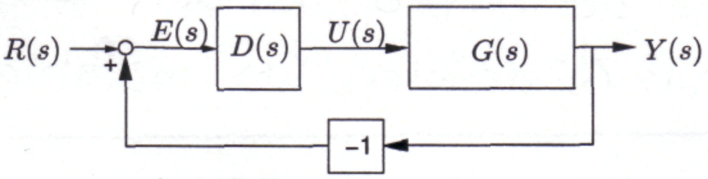
Naam: Uitwerkingen Student ID:

Opgave 5 (20 punten)

Gegeven is een gesloten lus systeem zoals in figuur 1. Daarbij zijn de volgende overdrachtsfuncties van belang:

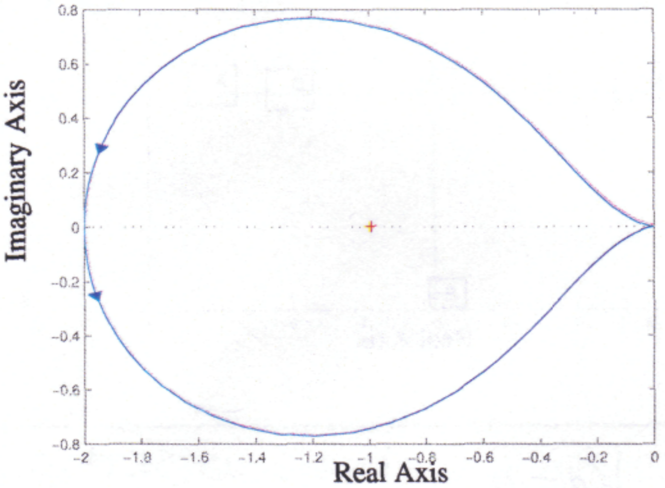
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s - 5} \quad \text{en} \quad D(s) = K_p.$$

De loop overdrachtsfunctie is $L(s) = D(s)G(s)$.



Figuur 1: Blokschema van het gesloten lus systeem

a). Beschouw de Nyquist plot van L met $K_p = 10$ zoals hieronder gegeven. Bepaal met behulp van het Nyquist criterium of het gesloten lus systeem stabiel is. Geef Z, N en P. Motiveer uw antwoord!



$s^2 + 4s - 5 = 0 \iff s = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Rightarrow s_1 = -5, \; s_2 = 1$

dus $P = 1$

Aantal omcirkelingen van -1 : $N = -1$ (tegen klok in).

8

Dus $Z = N + P = 0$, dus geen instabiele polen voor gesloten lus, dus stabiel.

Z.O.Z.

Tentamen Regeltechniek TBKRT05E, 3 november 2010

Naam: Uitwerkingen Student ID:

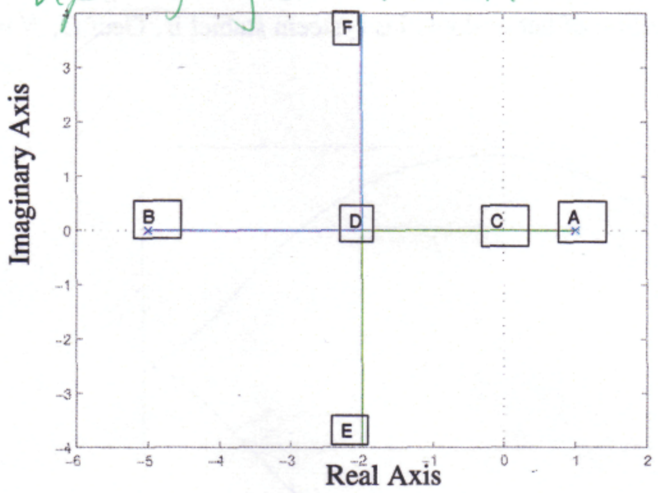
b). Voor welke waarden van K_p is het gesloten lus systeem stabiel? Motiveer uw antwoord!

6

Voor $K_p > 5$. De plot in a) is voor $K_p = 10$, bij $K_p = 5$ gaat de plot door -1. Voor $K_p \leq 5$ geldt dat $N = 0$, en dan $Z = 1$, dus dan is de gesloten lus instabiel.

c). Beschouw onderstaande rootlocus plot van $K_p G(s)$. Geef voor de punten A,B,C,D,E en F weer wat de bijbehorende waarden voor K_p zijn. Welke waarde(n) (welke punt(en)) past/passen bij onderdeel b) van deze opgave? Motiveer uw antwoord!

[redacted]



6

A,B : $K_p = 0$, rootlocus start in openluspolen.

C : $K_p = 5$, grens van stabiliteit, zie opgave b).

D : $K_p = 9$ → $1 + \frac{K_p}{s^2+4s-5} = 0 \Leftrightarrow$

$s^2+4s-5+K_p = 0$

$\Leftrightarrow s = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16+20-4K_p}$

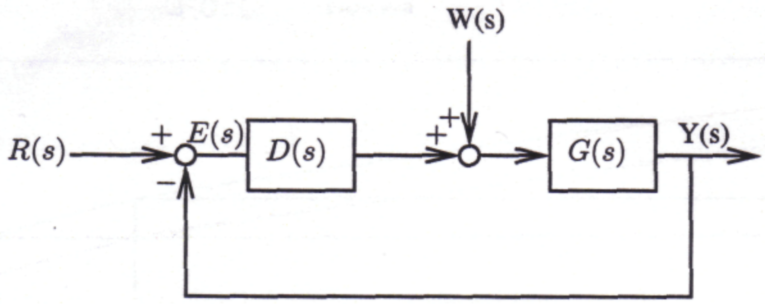
Voor $K_p \geq 9$, complexe oplossingen

E,F : $K_p \to \infty$

Opgave 6 (20 punten)

Gegeven is een open-lus systeem met overdrachtsfunctie: $G(s) = \dfrac{5}{s(s+2)}$

Voor dit systeem wordt een lag regelaar $D(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$ met $\alpha > 1$ ontworpen in de gesloten-lus configuratie zoals aangegeven in onderstaande figuur.



Figuur 2: Blokschema van het gesloten lus systeem

a). Geef de overdracht van de verstoring $W(s)$ naar $E(s)$. Wat moet K zijn om een steady state fout van 10% te hebben als gevolg van constante (stap) verstoring w? Motiveer uw antwoord!

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G(s)(W(s) + D(s)E(s))$$

$$\Rightarrow (1 + G(s)D(s))E(s) = R(s) - G(s)W(s)$$

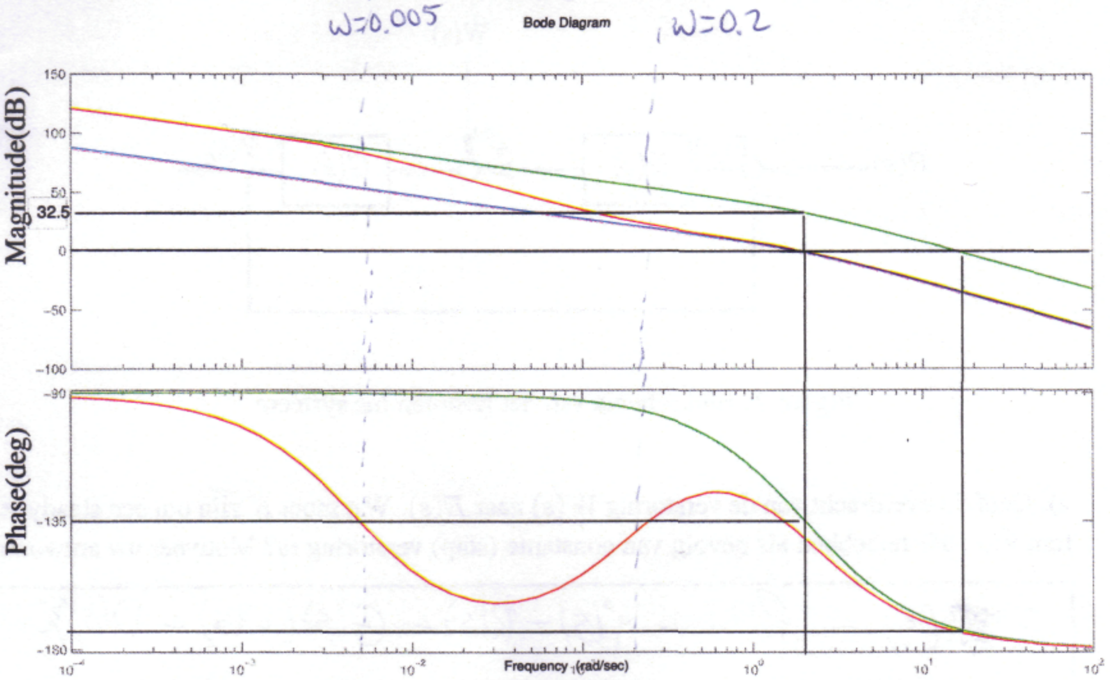
$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)D(s)}R(s) - \underbrace{\frac{G(s)}{1+G(s)D(s)}}_{\text{gevraagde overdracht.}} W(s)$$

10

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} - \frac{s\frac{5}{s(s+2)}}{1 + K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\cdot\frac{5}{s(s+2)}}\cdot\frac{1}{s} = -\lim_{s\to 0}\frac{(\alpha Ts+1)5}{s(s+2)(\alpha Ts+1) + K(Ts+1)5}$$

$$= -\frac{5}{5K} = -\frac{1}{K} < 0.1 \quad \text{voor } K > 10$$

We gaan verder met een waarde voor K zoals in opgave a). bepaald. is De Bode plot van de verschillende overdrachtsfuncties is hieronder weergegeven. De blauwe plot is de Bode plot van $G(s)$. De groene plot, welke voor de fase samenvalt met de blauwe, is de Bode plot van $KG(s)$. De rode plot is de plot van $D(s)G(s)$. De rode en blauwe magnitude plot vallen voor hoge frequenties samen, terwijl voor lage frequenties de groene en de rode samenvallen. De zwarte lijnen zijn hulplijnen.



b). Verklaar het ontwerp van $D(s)$ aan de hand van de Bode plots. Kunt u de verschillende specificaties (fase marge, cross over frequentie, ...) voor het ontwerp uit de plot halen? Geef een schatting van T, en α. Motiveer uw antwoord!

~~[illegible]~~ Hier: $K = 50$ (verschil tussen blauwe en groene/rode ~~[illegible]~~ lijn is ≈ 34 dB $\Rightarrow K \approx 50$).

ω_c voor $KG(s)$ is $\approx 10{,}8$. Met lagontwerp is cross over frequency naar $\omega_c = 2$ gelegd. Fase marge is claar $\approx 180° - 135° = 45°$

10

$\alpha = |KG(2j)|$ $20 \log \alpha \approx 32.5 \Rightarrow \alpha \approx 42$

Volgens regels lag ontwerp:

$\frac{1}{T} \approx \frac{1}{10}\omega_c = 0.2 \Rightarrow T = 5$

Breekpunten bij $\omega = 0.2$ en bij $\omega = 0,005$

EINDE TENTAMEN